Introduction à la Relativité

Professeur Alexandre Georges

Préambule

Avant Einstein, on pensait tout connaître de la nature de l'Univers et de son fonctionnement, qu'il ne restait finalement plus qu'à affiner les prédictions et perfectionner les observations. Cependant, quelques incohérences dans la conception newtonienne de l'espace et du temps, un peu d'éther, et des résultats inexpliqués dans la trajectoire de Mercure ont fait voler en éclat la conception absolue de l'espace et du temps, les *a priori* de l'époque concernant la nature de la lumière, et le concept même de force gravitationnelle.

Ce court papier fournira une introduction aux théories de la Relativité Restreinte et de la Relativité Générale. La première partie sera abordable avec des bases mathématiques très légères, la compréhension de la deuxième partie nécessitera quelques prérequis mathématiques, notamment en géométrie d'équations différentielles (pour laquelle nous ferons quelque petites piqûres de rappel), tandis que la troisième ne nécessitera que d'avoir compris les idées générales des deux premières. Pour une compréhension plus approfondie, je vous recommanderai quelques papiers ou bouquins probablement plus exhaustifs.

Au moment où j'écris ce « cours », je suis en débit extrêmement réduit, ce qui ne me permet pas de circuler facilement sur internet. J'improvise donc avec ce qui me vient à l'esprit et ce que j'ai dans mon ordinateur (vous remarquerez que les équations sont des images copiées depuis un logiciel LateX, parce que cet ordinateur n'a pas Word mais le Libre Office de Linux, l'autre ordinateur avec Windows et tous mes jeux m'ayant lâché … :'( ). Ainsi, certaines notations (choix des lettres grecs, développements) pourraient bien ne pas être les notations usuelles, mais des caractères que j'aurais choisi, ne me souvenant plus des caractères utilisés habituellement. Mais je pense que je saurai organiser les notions que je compte aborder sans trop m'éparpiller.

Ce papier sera peut-être amené à évoluer. En effet, il s'agit avant tout d'une matière première pour me préparer à mes prochaines activités de vulgarisation auprès du grand public ou d'intervention auprès d'un public plus spécialiste. Il s'agira donc, au début, d'un mélange peu délicat des deux. Le but étant, à terme, de perfectionner mes méthodes de transmission des connaissances en soumettant ce plan aux collègues et à l'expérience face à un public.

Sommaire

Partie I – Relativité Restreinte

Sous-partie 1 – L’espace et le temps

Section A – Contexte et description de l’espace-temps

La Relativité Restreinte est une théorie de l’espace et du temps par Albert Einstein, qu’il publie en 1905. L’idée de relativité n’est pas neuve, mais, sans ignorer qu’elle ait été, bien avant, suspectée par Bruno, énoncée par Galilée, et décrite par Newton, il ne s’agissait pas vraiment de la même relativité. Elle trouve un sens bien particulier dans l’esprit d’Einstein. Il aboutira à une conclusion complètement délirante aux yeux de nombre de ses contemporains : Le temps et l’espace sont relatif … Mais à quoi ? Que sont-ils ? Et comment Einstein en est-il arrivé à ce résultat ?

Les idées d’absoluité du temps, de vitesse de la lumière infinie, et d’éther luminifère ne plaisaient pas tellement à Einstein. Selon lui, il s’agissait d’*a priori* ou d’éléments considérés de façon à faire fonctionner encore des modèles limités. Et il a visé plutôt juste, mais ne l’a pas fait seul.

Le premier apport essentiel à la fondation de sa théorie de l’espace et du temps est le travail de Maxwell. En effet, celui-ci propose en 1865 une vitesse de la lumière finie, égale à c.

Ensuite, Mach constate que les champs électrostatiques se contractent lorsqu’ils sont en mouvement, ce qui ne semble pas correspondre du tout à la conception newtonienne du mouvement. Selon Newton, un objet en mouvement inertiel pourrait bien être immobile ou mobile, ça ne devrait rien changer pour lui. Pourtant, ces champs se contractent.

Lorentz va alors proposer des transformations permettant de modéliser ces contractions dues au mouvement, auxquelles vont s’ajouter les contributions de Poincaré, qui introduit à ces équations une constante à laquelle on peut se référer pour comparer des vitesses : La vitesse de la lumière, le fameux petit c de Maxwell. En gardant en tête l’éther, Poincaré postule que la lumière a une vitesse constante et qu’elle constitue, ce qui est absolument essentiel dans les transformations de Lorentz, une vitesse limite pour tout objet physique.

Nota bene : Aujourd’hui, on adopte une formulation un peu plus précise, considérant qu’aucun objet physique ne peut se déplacer plus vite que la lumière dans l’espace. Parce que l’espace lui même peut se contracter suffisamment pour que deux objets très lointains puissent, sans pour autant se déplacer dans l’espace, s’éloigner à une vitesse supérieure à celle de la lumière.

Et puis Einstein débarque. Il avait déjà résolu une partie des problèmes résolus par l’éther, en servant des travaux de Planck, par une description corpusculaire de la lumière. Il va cette fois remettre en question l’absoluité de l’espace et du temps. Pour cela, il va coupler deux idées : Que tout référentiel se vaut (la relativité à la Newton), mais que la lumière est constante, quel que soit le référentiel (on dira constante pour tout référentiel inertiel). Mais, pour que la lumière reste constante, quel que soit le référentiel inertiel, alors que tout référentiel inertiel est comparable, il est nécessaire de considérer que l’espace et le temps sont relatifs à la vitesse, de sorte que ladite vitesse soir en réalité une vitesse, par rapport à celle de la lumière, constante pour tout référentiel inertiel. C’est là que les transformations de Lorentz et les contributions de Poincaré seront utiles, car elles permettent de mettre en relation la vitesse d’un corps et les contractions et dilatations de l’espace et du temps. Cela permettra à la Relativité Restreinte, d’une part, de s’accorder aux mises en évidence de Mach, concernant la contraction des champs électrostatiques en fonction de leur mouvement, et aux observations effectuées dans le cadre de la mécanique newtonienne, parce que les prédictions de la théorie qu'Einstein propose ne sont significativement différentes des prédictions classiques qu'à des vitesses très importantes.

Section B – Les transformations de Lorentz

Tout d'abord, j'ai eu beau chercher ailleurs ce qui se faisait, je n'ai pas trouvé démonstration plus simple, complète, et épurée que celle d'Einstein. Sérieusement, c'est un papier qui se lit d'un bout à l'autre sans froncer les sourcis. Vous trouverez un lien vers son papier « De l'électrodynamique des corps en mouvement » dans la partie allouée à la bibliographie.

Albert commence par définir la simultanéité et énonce la situation suivante :

« Si un observateur est placé en A avec une horloge, il peut assigner un temps aux évènements à proximité de A en observant la position des aiguilles de l'horloge, qui sont simultanées avec l'évènement. Si une horloge est aussi placée en B — nous ajoutons que cette horloge est de même construction que celle en A —, alors un observateur en B peut chronologiquement estimer les évènements qui surviennent dans le voisinage de B. Mais sans conventions préalables, il est impossible de comparer chronologiquement les évènements en B aux évènements en A. Nous avons jusqu'à maintenant un « temps A » et un « temps B », mais aucun « temps » commun à A et B. Ce dernier temps (c'est-à-dire le temps commun) peut être défini, si nous posons par définition que le « temps » requis par la lumière pour aller de A à B est équivalent au « temps » pris par la lumière pour aller de B à A. Par exemple, un rayon lumineux part de A au « temps A », t_A *, en direction de B, est réfléchi de B au « temps B »,* t_B *, et revient à A au « temps A »,* t'_A. *Par définition, les deux horloges sont synchronisées si :*

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

Nous supposons que cette définition du synchronisme est possible sans causer d'incohérence, peu importe le nombre de points. En conséquence les relations suivantes sont vraies :

1. Si l'horloge en B est synchronisée avec l'horloge en A, alors l'horloge en A est synchronisée avec l'horloge en B.

2. Si l'horloge en A est synchronisée à la fois avec l'horloge en B et avec l'horloge en C, alors les horloges en B et C sont synchronisées. »

C'est très important par la suite pour interpréter les transformations de Lorentz. En effet, on pourra alors continuer en considérant que, pour deux référentiels S(t,x,y,z) et S'(t',x',y',z') en translation de vitesse uniforme v, avec x et x' coïncidents et une origine des temps t et t' fixée au moment où x, y, z coïncident avec x', y', z' (voir la simultanéité plus haut). Dans la mesure où nous connaissons S' par rapport à S, nous pouvons établir les systèmes d'équations de la translation uniforme de vitesse v :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x - vt = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Petite explication : Comme on l’a dit précédemment, la translation de S à S’ se fait suivant l’axe x, coïncident avec x’ à une vitesse v, il n’y a donc pas de changement, par translation de vitesse v, de y à y’ ou de z à z’.

Nous pouvons alors directement déduire un système d’équations de translation :

$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ y' = By \\ z' = Cz \end{cases}$$

Einstein aura imaginé un rayon de lumière se déplaçant par rapport à l’origine de S’ qui, observé depuis S se déplace toujours le long des axes à une vitesse $\sqrt{(c^2 - v^2)}$ et a posé une fonction a correspondant à $\varphi(v)$ indéterminée, vérifiant :

$$t' = a(t - \frac{v}{c^2 - v^2}(x - vt))$$

De sorte que :

$$x' = ct'$$

Et que :

$$x' = ac(t - \frac{v}{c^2 - v^2}(x - vt))$$

Or, si le rayon lumineux ici étudié se déplace en fonction de l’origine de S’ à une vitesse c-v mesurée dans S, nous obtenons :

$$\frac{x - vt}{c - v} = t$$

Et ainsi :

$$x' = ac(\frac{x - vt}{c - v} - \frac{v}{c^2 - v^2)}(x - vt))$$

$$x' = a\frac{c^2}{c^2 - v^2)}(x - vt)$$

De même, si le rayon se déplace selon les deux autres axes, nous pouvons établir que :

$$y' = ct'$$

Et donc :

$$y' = ac(t - \frac{v}{c^2 - v^2)}(x - vt))$$

Et je viens de m’apercevoir qu’après le v² j’ai ajouté une parenthèse inutile, mais je ne vais pas tout refaire pour faute de frappe n’ajoutant qu’une parenthèse qui ne change rien … En tout cas pas aujourd’hui.

Et pour :

$$\frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0$$

Alors nous obtenons :

$$y' = a\frac{c}{c^2 - v^2}y$$

Et

$$z' = a\frac{c}{c^2 - v^2}z$$

Obtenant alors le système :

$$\begin{cases} t' = \varphi(v)\beta(t - \frac{vx}{c^2}) \\ x' = \varphi(v)\beta(x - vt) \\ y' = \varphi(v)y \\ z' = \varphi(v)z \end{cases}$$

Avec :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Le fameux facteur de Lorentz.

Mais nous n’avons toujours pas déterminé $\varphi(v)$ ...

Comme on l’a dit précédemment, c est constante dans toutes les directions et pour tout référentiel inertiel. Nous établissons alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \end{cases}$$

Nota bene : Derrière ça, c’est juste du Pythagore, pas d’affolement si je ne détaille pas.

Nous posons S’’ pour lequel :

$$\begin{cases} t'' & = \varphi(-v)\beta(-v)(t + \frac{vx'}{c^2}) & = \varphi(v)\varphi(-v)t \\ x'' & = \varphi(-v)\beta(-v)(x' + vt) & = \varphi(v)\varphi(-v)x \\ y'' & = \varphi(-v)y' & = \varphi(v)\varphi(-v)y \\ z'' & = \varphi(-v)z' & = \varphi(v)\varphi(-v)z \end{cases}$$

Puisque les relations entre x'', y'', z'' et x, y, z ne contiennent pas t, il apparaît que S et S'' sont au repos l'un par rapport à l'autre. Ainsi :

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1$$

Or, puisque y ne varie pas selon le signe de v, nous avons :

$$\varphi(v) = \varphi(-v)$$

Et enfin :

$$\varphi(v) = 1$$

Nous autorisant ainsi de poursuivre avec :

$$\begin{cases} t' = \beta(t - \frac{vx}{c^2}) \\ x' = \beta(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Reprenons maintenant (en ajustant les termes) le papier d'Einstein :

« Supposons une sphère rigide de rayon R qui est au repos relativement au système k et dont le centre coïncide avec l'origine de [S], alors l'équation de la surface de cette sphère, qui se déplace à une vitesse v relativement à [S], est :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$$

Au temps t = 0 [cf la simultanéité vue plus haut], l'équation de cette surface s'exprime en fonction de x, y, z par :

$$\frac{x^2}{(\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2})^2} + y^2 + z^2 = R^2$$

Un corps rigide, qui montre la forme d'une sphère quand mesuré dans un système stationnaire, a en conséquence dans des conditions de mouvement — lorsqu'observé depuis le système stationnaire —, la forme d'un ellipsoïde de révolution dont les demi-axes mesurent :

$$R\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}, R, R$$

Alors que les dimensions en y et z de la sphère (ou de n'importe quel autre solide) ne semblent pas modifiées par le mouvement, la dimension en x est raccourcie selon le rapport $\sqrt{(1-(v/[c])^2)}$ *; le raccourcissement est d'autant plus grand que la vitesse v est grande. Pour v = [c] tous les corps en mouvement, lorsqu'observés depuis un système stationnaire, se réduisent à des plans. Pour une vitesse supraluminique, nos propositions sont dénuées de sens. Par ailleurs, dans les observations qui suivent, nous découvrirons que la vitesse de la lumière joue le rôle physique d'une vitesse infiniment grande.*

Il est évident que des résultats semblables sont vrais pour des corps au repos dans un système stationnaire lorsqu'ils sont observés depuis un système en mouvement rectiligne uniforme.

Soit une horloge immobile dans le système stationnaire qui donne le temps t, et qui donne le temps [t'] lorsqu'immobile dans un système en mouvement. Supposons qu'elle se trouve à l'origine du système en mouvement [S'] et réglée pour donner le temps [t']. À quelle cadence avance cette horloge, lorsqu'observée du système stationnaire ?

À partir des grandeurs x, t et [t'], qui réfèrent à l'endroit de cette horloge, les équations sont données par : »

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t - \frac{vx}{c^2})$$

Et :

$$x = vt$$

Alors :

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t - \frac{v^2}{c^2}t)$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v^2}{c^2}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(Oui j'ai eu envie de faire durer le plaisir sur le dernier développement … En revanche, j'ignore pourquoi.)

Et enfin :

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Vous que vous trouverez souvent écrite ainsi :

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Revenons, pour compléter notre panorama, aux transformations de Lorentz :

$$\begin{cases} c\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(c\Delta t - \frac{v\Delta x}{c}) \\ \Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

Et voilà, le temps est relatif ! C'est beau, non ? Et puisqu'il s'agit d'Albert Einstein, il ne s'est pas arrêté là ...

Sous-partie 2 – L'énergie et la masse

Tout d'abord, il me faut introduire la notion d'intervalle d'espace-temps (oui en fait on continue de parle de l'espace et du temps, j'y peux rien, mes cours étaient faits comme ça). En fait ce n'est pas très compliqué, ça correspond … Eh bien à l'intervalle d'espace-temps. Oui c'est un terme très basique et il veut dire exactement qu'il dit. Vous allez comprendre :

On notera le carré d'une longueur entre deux objets A et B exprimé en fonction de leurs coordonnées x, y, et z :

$$\Delta l^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Là encore, ce n'est que du Pythagore. On simplifiera par :

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Ensuite on exprime l'intervalle d'espace-temps Δs^2, qui correspond à un intervalle … d'espace-temps (le nom est une définition en fait), mais vous allez voir c'est simple :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2$$

Pour ceux qui se demandent « il sort d'où le c² ? », retournez un peu en arrière, vous avez raté un truc dans les transformations de Lorentz.

Ce qui nous permet par ailleurs de déterminer une métrique, de signes (+ ; - ; - ; -) :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

On aurait aussi pu choisir la forme (- ; + ; + ; +) et dans ce cas il faudra tout inverser par la suite. Si en mathématiques cela semble évident, ça a un sens assez contre-intuitif en physique. Je vous propose donc de nous attarder un peu sur cette métrique. … Enfin pseudo-métrique parce que η(x,x) (pseudo-norme au carré) peut être négatif. En fait, la pseudo-norme c'est assez important. Notons s la distance de Minkowski, c'est à dire une distance entre les points ζ_1 et ζ_2 dans un espace-temps de Minkowski, vérifiant :

$$s^2 = \eta(\vec{\zeta_1\zeta_2}, \vec{\zeta_1\zeta_2})$$

Petite précision : Si un matheux me sort un « on dit un espace de Minkowski », il devra, pour me convaincre, définir un espace de Minkowski qui ne présuppose pas la définition spatio-temporelle de cet espace et donc un espace de Minkowski dans lequel x s'oriente toujours dans le sens de l'espace pour tout η(x,x). Si, à l'époque, on parlait seulement d'espace, c'est parce que la définition du temps comme n'étant pas une dimension substantiellement différente de l'espace ne s'était pas encore réellement imposée dans les esprits des mathématiciens et physiciens qui ont travaillé sur ce sujet. Pour comprendre cette précision, je vous invite à continuer.

C'est à dire :

$$s^2 = \eta_{\mu\nu}(x^{\mu}_{\zeta_2} - x^{\mu}_{\zeta_1})(x^{\nu}_{\zeta_2} - x^{\nu}_{\zeta_1})$$

De sorte que

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$$

Où :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'était long à placer tous ces chiffres sur LateX !

Si vous vous demandez ce que signifient les termes μ et ν lorsqu'ils sont notés en haut et en bas, c'est que vous n'êtes pas familier avec les indices covariants et contravariants. En fait c'est assez simple. Admettons que nous ayons un espace vectoriel K^n, c'est à dire un espace K à n dimensions structurés par ces vecteurs constituant sa base v. En fait, vous savez déjà ce qu'est un espace vectoriel si vous avez pu suivre la sous-partie 1, c'est juste que là il faut bien poser des noms là dessus. La sera composée des vecteurs $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$. Maintenant nous voulons passer de notre base v à une base w. Pour cela, nous effectuerons une translation de sorte que

$$A_\mu^\nu v_\nu = w_\mu$$

Considérons une famille de fonctions $(X(\mu)_\mu)$ de K^n, pour μ allant de 1 à n. Maintenant, notons qu'elle correspond aux familles de vecteurs, des bases v et w, $(F(\mu)(v))_\mu$ et $(F(\mu)(w))_\mu$, notées respectivement $\alpha(\mu)_\mu$ et $\beta(\mu)_\mu$.

Si

$$\beta(\mu) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (A_\mu^\nu \alpha(\nu))$$

Alors F est covariante.

On notera alors

$$\beta_\mu = A_\mu^\nu \alpha_\nu$$

Les grandeurs de la famille F de fonctions varient lors de la translation de la même manière que les vecteurs de la base.

Et si

$$\alpha(\nu) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} (A_\mu^\nu \beta(\mu))$$

Alors F est contravariante.

On notera alors

$$\alpha^\nu = A_\mu^\nu \beta^\mu$$

Les grandeurs de la famille F de fonctions varient lors de la translation de inversement aux vecteurs de la base.

Maintenant qu'on a défini les notions d'indices contravariant et covariant, nous pouvons continuer ...

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reprenons K, notre base v, et notre famille de vecteurs . Nous voyons que

$$\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = \eta(v_{\mu}, v_{\nu})x^{\mu}x^{\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = \eta(v_{\mu}x^{\mu}, v_{\nu}x^{\nu})$$

$$\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = \eta(x, x)$$

Nous voyons ainsi que la pseudo-norme peut être négative, dans la mesure où $\eta_{11}=-1$.

Oui je fais commencer μ et v à 1 pour faire un parallèle avec mon explication des termes covariants et contravariants.

Considérons une courbe d'espace-temps $(x^1\tau, x^2\tau, x^3\tau, x^4\tau)$ (cf pseudo-métrique vue auparavant pour comprendre comment et pourquoi on détermine cette courbe).

Nous aurons alors, pour η_{11} :

$$\eta(x, x) < 0$$

x correspond alors à une orientation dans le temps.

Et, pour η_{22} , η_{33} , η_{44} :

$$\eta(x, x) > 0$$

x correspond alors à une orientation dans l'espace.

Ainsi, pour :

$$\eta(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}, \frac{dx^{\mu}}{d\tau}) < 0$$

La courbe d'espace-temps est alors temporelle.

Et, pour :

$$\eta(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}, \frac{dx^{\mu}}{d\tau}) > 0$$

La courbe d'espace-temps est alors spatiale.

Cette démonstration montre une chose assez contre-intuitive : L'espace et le temps sont la même chose, à juste un signe près. Dans un espace-temps de Minkowski, on commence à entrevoir ce que la Relativité Générale nous confirmera à l'extrême. Le temps et l'espace sont relatifs, mais surtout ne sont pas essentiellement différents. Le temps, c'est un espace de signe opposé. Merci Albert !

Mais il y a une chose de plus mes chéris :

Si

$$\eta(\frac{dx^\mu}{d\tau}, \frac{dx^\mu}{d\tau}) = 0$$

Alors x est dit isotrope. Il ne correspond ni à une orientation dans l'espace, ni à une orientation dans le temps. Mais dans quel cas la réalité ne s'écoule-t-elle plus dans le temps en Relativité Restreinte ? Eh oui, dans le cas où on va à la vitesse de la lumière, comme on l'a vu précédemment. La courbe d'espace-temps correspond alors à la lumière.

Maintenant, nous avons toutes les clés en main pour finir de démontrer la plus célèbre équation de l'histoire des sciences :

Supposons un système d'ondes planes de lumière, référé au système de coordonnées (x, y, z), d'énergie l, de direction formant un angle φ avec l'axe x du référentiel noté K. Si nous introduisons un nouveau système de coordonnées (ρ, σ, θ), uniformément traduit parallèlement par rapport au système (x, y, z), et dont l'origine se déplace le long de l'axe des x avec la vitesse v, alors la quantité de lumière mesurée dans K' (ρ, σ, θ) a pour énergie :

$$l^* = l\frac{1 - \frac{v}{c}cos(\varphi)}{\gamma^{-1}}$$

Où

$$\gamma = (\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})^{-1}$$

Soit un corps au repos dans K (x, y, z), dont l'énergie, référée au système (x, y, z), est E_0. L'énergie du corps par rapport au système (ρ, σ, θ), qui se déplace avec la vitesse v comme ci-dessus, doit être H_0. Supposons simultanément des ondes planes de lumière d'énergie $L/2$ (mesurées par rapport à K) ,dans une direction formant un angle φ avec l'axe des x et une quantité égale de lumière dans la direction opposée. Pendant tout ce temps, le corps doit rester immobile par rapport à K, processus qui doit satisfaire le principe d'énergie et qui doit être vrai (selon le principe de relativité) pour les deux systèmes de coordonnées. Si E_1 et H_1 désignent l'énergie du corps après l'émission de la lumière, mesurée par rapport à K et K', on obtient, respectivement, en utilisant la relation indiquée ci-dessus :

$$\begin{cases} E_0 = E_1 + (\frac{L}{2} + \frac{L}{2}) \\ H_0 = H_1 + (\frac{L}{2}\frac{1-\frac{v}{c}cos(\varphi)}{\gamma^{-1}} + \frac{L}{2}\frac{1+\frac{v}{c}cos(\varphi)}{\gamma^{-1}}) = H_1 + \frac{L}{\gamma^{-1}} \end{cases}$$

Nous permettant alors d'obtenir :

Les deux différences de forme H-E apparaissant dans cette expression ont une signification physique simple. H et E sont les valeurs d'énergie du même corps, rapportées à deux systèmes de coordonnées en mouvement relatif, le corps étant au repos dans l'un des systèmes (K). Il est donc clair que la différence H-E peut différer de l'énergie cinétique du corps D par rapport à l'autre système (K') uniquement par une constante additive C, qui dépend du choix arbitraire des constantes additives des énergies H et E. On peut donc poser :

$$\begin{cases} H_0 - E_0 = D_0 + C \\ H_1 - E_1 = D_1 + C \end{cases}$$

Puisque C ne change pas pendant l’émission de lumière. Ainsi, nous obtenons

$$D_0 - D_1 = L(\frac{1}{\gamma^{-1}} - 1)$$

$$D_0 - D_1 = L(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1)$$

Einstein conclut alors :

« L'énergie cinétique du corps par rapport à K’ diminue à la suite de l'émission de lumière d'une quantité indépendante des caractéristiques du corps. De plus, la différence $D_0 - D_1$ dépend de la vitesse exactement comme l'énergie cinétique de l'électron.

En négligeant les quantités du quatrième et des ordres supérieurs, nous pouvons exposer :

$$D_0 - D_1 = \frac{L}{c^2}\frac{v^2}{2}$$

De cette équation découle directement: Si un corps libère l'énergie L sous forme de rayonnement, sa masse diminue de L/c^2 . Comme il est évident ici que le retrait de l’énergie retirée du corps se transforme en énergie de radiation plutôt qu’en un autre type d’énergie, nous sommes amenés à la conclusion plus générale : La masse d’un corps est une mesure de son contenu énergétique ; Si l'énergie change de L, la masse change dans le même sens de $L/9.10^{20}$, si l'énergie est mesurée en ergs et la masse en grammes. Peut-être sera-t-il possible de tester cette théorie en utilisant des corps dont le contenu énergétique est très variable (sels de radium, par exemple). Si la théorie est en accord avec les faits, alors le rayonnement transmet l'inertie entre les corps émetteur et absorbant. »

En effet, si nous prenons $D = Mv^2/2$, nous obtenons ici $M_0 - M_1 = L/c^2$.

Pour une formulation plus générale, nous utiliserons la notion de quadrivecteur vitesse, tel que $v = (cdt/d\tau, dx/d\tau, dy/d\tau, dz/d\tau)$. Nous exprimerons alors le quadrivecteur énergie-impulsion :

$$p = mv = (mc\frac{dt}{d\tau}; m\frac{dx}{d\tau}; m\frac{dy}{d\tau}; m\frac{dz}{d\tau})$$

Or

$$D_0 - D_1 = L(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1)$$

Et

$$v\frac{M_0 - M_1}{2} = \frac{Lv^{-1}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - Lv^{-1}$$

Ainsi, en considérant :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2$$

Pour

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Sans oublier que

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Et donc que

$$mc\frac{dt}{d\tau} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

On obtient alors :

$$p^\mu = (\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$$

On observera l'application à la métrique :

$$m^2\frac{ds^2}{d\tau^2} = m^2c^2\frac{dt^2}{d\tau^2} - m^2\frac{dl^2}{d\tau^2}$$

Or nous avons déjà pu noter la différence de quantités de mouvement (due à la masse) et d'énergie cinétique (due à la masse) :

$$v\frac{M_0 - M_1}{2} = \frac{Lv^{-1}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - Lv^{-1}$$

Dans la mesure où :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta \tau^2$$

On peut alors conclure que, pour tout référentiel inertiel :

$$m^2c^2 = (\frac{E}{c})^2 - (\vec{p})^2$$

Et ainsi le carré de la norme du quadrivecteur énergie-impulsion :

$$(\frac{E}{c})^2 - (p)^2$$

Dans le repère dans lequel une particule est au repos, son impulsion est nulle. On notera alors :

$$(\frac{E}{c})^2 - (p)^2 = (\frac{E_0}{c})^2$$

Donnant la très célèbre :

$$(\frac{E_0}{c})^2 = m^2c^2$$

Ah non, encore un peu …

$$(E_0)^2 = m^2c^4$$

Toujours pas ? Une dernière alors :

$$E_0 = mc^2$$

Ou E=mc² pour les intimes.

Et c'est pas fini ! Si on considère que

$$p^\mu = (\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}})$$

Et que

$$p^\mu = (\frac{E}{c}; \vec{p})$$

On peut alors établir les relations :

$$\begin{cases} \frac{E}{c} = \gamma mc \\ p = \gamma mv \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = \gamma mc^2 \\ p = \gamma mv \end{cases}$$

Nous permettant de conclure :

$$p = \frac{E}{c}\frac{v}{c}$$

Afin de lier impulsion (quantité de mouvement) et énergie.

Sous-partie 3 – Conséquences

Les conséquences de la Relativité Restreinte sont nombreuses et chacune aurait valu au moins un prix Nobel (sérieusement, je n'exagère même pas) : L'espace et le temps sont relatifs, ils sont sensiblement la même chose (à un signe près, juste ça !), la masse d'un corps n'est qu'une expression de son contenu énergétique (énergie de masse), la vitesse de la lumière est fixe et constante dans tous les référentiels inertiels (indépendante de la vitesse de la source ou de l'observateur), ... Et j'en oublie peut-être, il est trois heures du matin. Bref, en deux papiers seulement (que vous trouverez dans la bibliographie), Albert Einstein a changé notre conception du temps, de l'espace, de la lumière, de la masse, de l'énergie, etc …

Et il ne s'est encore pas arrêté là. Parce qu'une des conséquences de la Relativité Restreinte est qu'aucun objet physique, aucune quantité ne peut se déplacer dans l'espace à une vitesse supérieure à c. Or, en mécanique newtonienne, le champs gravitationnel a une vitesse de propagation infinie, ce qui n'est pas permis par la Relativité Restreinte. Einstein a donc entrepris de concevoir une nouvelle théorie de la gravitation.

Partie II – Relativité Générale

Sous-partie 1 – Compréhension

Section A – Conception physique

Texte

Section B – Difficultés d'appréhension

Texte

Section C – Rappel de quelques prérequis mathématiques

Texte

Sous-partie 2 – La géométrie de l'espace-temps

Section A – Un espace-temps courbe

Texte

Section B – La gravitation

Sous-section a – Définition

Texte

Sous-section b – Expression

Texte

Section C – L'équation d'Einstein

Sous-section a – Signification

Texte

Sous-section b – Construction

Unité α – Le tenseur énergie-impulsion

Texte

Unité β – La constante de couplage dimensionnée

Texte

Unité γ – Le tenseur d'Einstein

Texte

Unité δ – Et on oublie pas Riemann !

Texte

Unité ε – Le tenseur de Ricci et la courbure scalaire

Texte

Unité ζ – Le tenseur métrique

Texte

Sous-section c – Solutions de l’équation

Unité α – La métrique de Schwarzschild

Texte

Unité β – D’autres solutions

Texte

Sous-section d – Expression du temps propre

Texte

Partie III – Applications

Sous-partie 1 – Le cas des trous noirs

Section A – Description

Texte

Section B – Pathologie de l’espace-temps ?

Texte

Sous-partie 2 – L’Effet Lense-Thirring

Texte

Sous-partie 3 – L’expansion de l’Univers

Texte

Section A – Notion de décalage

Sous-section a – L’expérience de Pound-Rebka

Texte

Sous-section b – La conservation relative de l’énergie

Texte

Section B – Gonflement de l’espace

Texte

Section C – Étude de cas

Texte

Sous-partie 4 – Les conditions sur l’énergie

Texte

Sous-partie 5 – Les ondes gravitationnelles

Texte

Lectures supplémentaires

Texte